

---

Preprint No. M 17/07

**Spoke Graphs - Speichengraphen**

Peter E. John und Wilfried Rausch

August 2017

**URN:** urn:nbn:de:gbv:ilm1-2017200387

---

**Impressum:**

Hrsg.: Leiter des Instituts für Mathematik  
Weimarer Straße 25  
98693 Ilmenau  
Tel.: +49 3677 69-3621  
Fax: +49 3677 69-3270  
<http://www.tu-ilmenau.de/math/>

# Spoke Graphs - Speichengraphen

Peter E. John und Wilfried Rausch

Institut für Mathematik der Technischen Universität Ilmenau

Schlagworte: Petersen-Graph (allgemein), kubische Graphen, Nomenklatur, charakteristisches Polynom und Eigenwerte, Gerüste, Linearfaktoren, Hamiltonkreise, Packungsdichte

## 1. Einführung

Im Jahr 1891 erschien von dem Dänischen Mathematiker Julius Petersen (1839 - 1910) eine Arbeit mit dem Titel "Die Theorie der regulären Graphen"<sup>(1)</sup>, in welcher die Faktorisierung regulärer Graphen untersucht wurde. Hier sind erstmals grundlegende Ergebnisse der Graphentheorie und der nach Petersen benannte Graph  $Pe = Pe(5, 2)$  (s. Abb. 1) publiziert, der in vielen Veröffentlichungen als signifikantes Beispiel verwendet wird. In  $Pe(5, 2)$  steht die „5“ für den aus den u-Knotenpunkten gebildeten u-Kreis und die „2“ bringt zum Ausdruck, dass der aus den v-Knotenpunkten gebildete v-Kreis jeweils einen v-Knoten überspringt.

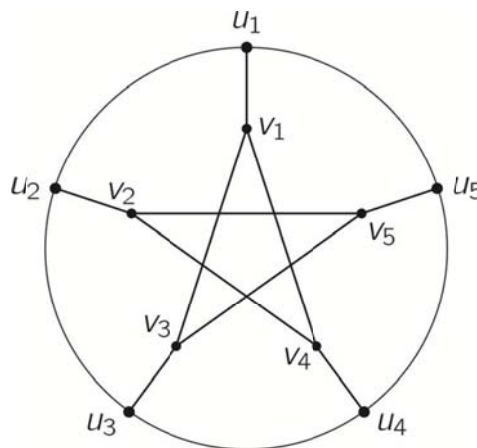


Abb. 1: Der Petersen-Graph  $Pe = Pe(5, 2)$

Verändert man die Anzahl der Knotenpunkte der u- und v-Kreise in gleicher Weise, so ergeben sich die *verallgemeinerten Petersen Graphen* (s. u.). Diese wurden zuerst von H. S. M. Coxeter<sup>(2)</sup> und K. Bannai<sup>(3)</sup> beschrieben.

Es sei  $G = (V, E)$  ein Graph mit der Knotenpunktmenge  $V = V(G)$  und der Kantenmenge  $E = E(G)$ . Die Anzahlen der Knotenpunkte und Kanten von  $G$  werde mit  $n = n(G)$  bzw.  $m = m(G)$  bezeichnet. Die Menge aller endlichen (zusammenhängenden) Graphen sei  $\mathbf{G}$ .

Zwei Graphen  $G, G' \in \mathbf{G}$  heißen *isomorph* (kurz:  $G \cong G'$ ), wenn es eine Bijektion  $\alpha'$ :

$V(G) \leftrightarrow V(G')$  gibt mit  $(u, v) \in E(G)$  genau dann, wenn  $(\alpha'(u), \alpha'(v)) \in E(G')$  für alle

$u, v \in V(G)$  ist. Können in einem Graphen  $G$  die Knotenpunkte derart schwarz und weiß gefärbt werden, dass Nachbarknotenpunkte unterschiedliche Farbe haben, so werde  $G$  *paarer (bipartiter) Graph* genannt.

Graph  $G$  heißt *kubisch (3-regulär)*, falls jeder seiner Knotenpunkte mit genau drei Kanten von  $G$  inzidiert, wobei Mehrfachkanten zugelassen sind.

Die Menge  $\mathcal{G}^3$  bezeichne alle kubischen Graphen.

Der verallgemeinerte Petersen Graph  $Pe(c, k) \in \mathcal{G}^3$  ( $c = 3, 4, 5, \dots; 1 \leq k \leq c - 1$ ) hat die Knotenpunktmenge  $V(Pe(c, k)) = \{u_i, v_i; i = 1, 2, \dots, c\}$  und die Kantenmenge  $E(Pe(c, k)) = \{(u_i, u_{i+1}), (u_i, v_i), (v_i, v_{i+k}); i = 1, 2, \dots, c, k = 1, 2, \dots, c - 1 \text{ und der Index wird (mod } c) \text{ reduziert}\}$  (in Abb. 1 sind  $c = 5$  und  $k = 2$ ). Offensichtlich sind die beiden Graphen  $Pe(c, k)$  und  $Pe(c, c - k)$  isomorph, also  $Pe(c, k) \cong Pe(c, c - k)$ . Ist  $k = c/2$ , so findet man im Graphen  $Pe(c = 2k, k)$  genau  $k$  Doppelkanten (siehe M. E. Watkins<sup>(4)</sup>; mitunter auch als „Zweiecke“ bezeichnet), somit gehören diese ebenfalls zur Menge  $\mathcal{G}^3$ .

Es sei  $g = \text{ggT}(c, k)$  der *größte gemeinsame Teiler* von  $c$  und  $k$ . Zwei Graphen  $Pe(c, k')$  und  $Pe(c, k'')$  sind isomorph, falls  $\text{ggT}(c, k') = \text{ggT}(c, k'')$  und  $k'k'' \equiv 1 \pmod{c}$  sind. Die beiden Graphen  $Pe(10, 2)$  und  $Pe(10, 6)$  sind somit nicht isomorph, da  $\text{ggT}(10, 2) = \text{ggT}(10, 6) = 2$ , aber  $k'k'' = 12 \equiv 2 \pmod{10}$  ist.

Eine interessante Erweiterung stellen die seit 1988 aus dem Foster Census<sup>(5)</sup> bekannten *I-Graphen* dar. Der *I-Graph*  $I(c, j, k)$ ,  $1 \leq j, k < c$  und  $j, k \neq c/2$ , hat die Knotenpunktmenge  $V(I(c, j, k)) = \{u_i, v_i; i = 1, 2, \dots, c\}$  und die Kantenmenge  $E(I(c, j, k)) = \{(u_i, u_{i+j}), (u_i, v_i), (v_i, v_{i+k}); i = 1, 2, \dots, c, \text{ wobei der Index (mod } c) \text{ reduziert wird}\}$ . Somit ist jeder verallgemeinerte Petersen Graph auch ein *I-Graph*, denn es ist  $Pe(c, k) = I(c, 1, k)$ . Offensichtlich ist  $I(c, j, k) \cong I(c, c-j, k) \cong I(c, j, c-k)$ .

In dieser Arbeit wird eine (nicht zu enge) Klasse von Graphen betrachtet, für die wesentliche Parameter (Spektrum, Anzahl von Gerüsten, Linearfaktoren, Hamiltonkreise, Packungsdichte ) teils explizit berechnet werden können.

## 2. Konstruktion eines Speichengraphen

### Vorbemerkung

Zunächst betrachte man einen oben beschriebenen verallgemeinerten Petersen Graphen  $Pe(c, k)$ . Jede  $u$ - $v$ -Kante  $(u_i, v_i)$  mit ihren Endknotenpunkten  $u_i, v_i$  werde als *Speiche* (kurz:  $Sp_i$ ) von  $Pe(c, k)$  bezeichnet. Der  $u$ -Kreis  $C_u$  hat die Kantenmenge  $E(C_u) = \{(u_i, u_{i+1}); i = 1, 2, \dots, c, \text{ Index mod } c\}$ . Ist  $g = \text{ggT}(c, k) = 1$ , so gibt es genau einen  $v$ -Kreis mit der Kantenmenge  $E(C_v) = \{(v_i, v_{i+k}); i = 1, 2, \dots, c, \text{ Index mod } c\}$  und im Falle  $g > 1$ , bilden die Kanten genau  $g$  paarweise disjunkte Kreise der Länge  $c/g$ , die zur Menge  $\mathbf{C}_v$  zusammengefasst werden. Man kann also den Graphen  $Pe(c, k)$  so konstruieren, dass zunächst die  $c$  Speichen  $Sp_i$  ( $i = 1, 2, \dots, c$ ) mit den Endknotenpunkten  $u_i, v_i$  vorgegeben werden, die alle Kopien des Graphen  $K_2$  mit  $V(K_2) = \{u, v\}$  und  $E(K_2) = \{(u, v)\}$  sind. Die Speichen werden zunächst durch den Kreis  $C_u$  verbunden und anschließend, je nach  $g$ , wird der Kreis  $C_v$  bzw. die Menge  $\mathbf{C}_v$  der  $g$  Kreise gebildet. Die Kreise  $C_u, C_v$  bzw. die Kreise von  $\mathbf{C}_v$  werden als *periphere Kreise* von  $Pe(c, k)$  bezeichnet.

Ganz analog kann ein Speichengraph konstruiert werden.

Es sei  $Sp \in \mathbf{G}$  ein Graph mit  $v = v(Sp) > 1$  Knotenpunkten, von denen  $h = h(Sp) > 1$  die Valenz 1 (hängende Knotenpunkte von  $Sp$ ) und  $(v - h)$  Knotenpunkte die Valenz 3 haben.

Offensichtlich ist  $v$  gerade. Graph  $Sp$  werde als *Speiche* bezeichnet.

Es ist zweckmäßig, eine Speiche  $Sp$  folgendermaßen zu sehen. In einer Ebene  $E$  befinde sich ein geometrischer Kreis  $K$ . Unter den möglichen Einbettungen von  $Sp$  in  $E$  wählen wir eine solche aus, bei der die hängenden Knotenpunkte außerhalb und die dreivalenten Knotenpunkte von  $Sp$  innerhalb von  $K$  liegen (Ausnahmen sind in Abb. 4.3 gegeben).

Beispiele für Speichen mit  $h = 3$  sind in Abb. 2.1 zu finden.

Auf die rechnerischen Ergebnisse hat diese Einschränkung keinen Einfluß.

Die Menge aller Speichen mit  $h$  hängenden Knotenpunkten sei  $\mathbf{Sp}(h) \subset \mathbf{G}$ . Die hängenden Knotenpunkte einer Speiche  $Sp$  werden mit  $j = 1, 2, \dots, h$  in beliebiger Anordnung nummeriert. Ihnen sind Zahlen  $k_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, h$ , so zugeordnet, dass  $1 \leq k_j < c$  ist (s. u.). Der größte gemeinsame Teiler von  $k_j$  mit  $c$  werde mit  $g_j = \text{ggT}(c, k_j)$  bezeichnet, und es sei  $g_0 = \text{ggT}(g_1, g_2, \dots, g_h)$ .

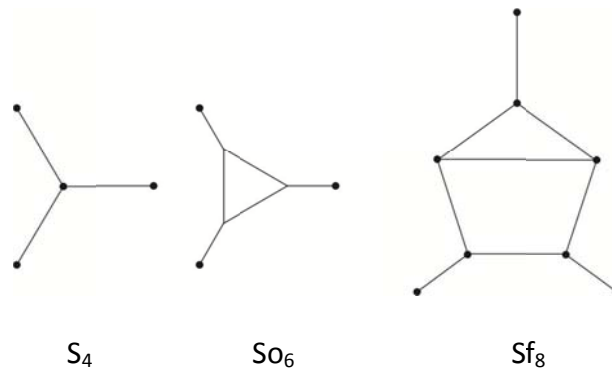


Abb. 2.1 Speichen mit  $h = 3$

Die hängenden (eivalenten) Knotenpunkte von  $Sp \in \mathbf{Sp}(h)$  werden, unter Beachtung der  $g_j$ -Werte, von  $j = 1$  bis  $j = h'$  ( $g_j = 1$ ) bzw. von  $j = h' + 1$  bis  $j = h$  ( $g_j > 1$ ) und die dreivalenten von  $j = h + 1$  bis  $j = v$  nummeriert.

Nun wähle man  $c$  Kopien  $Sp_i$  der Speiche  $Sp$  mit den Knotenpunkten  $1_i, 2_i, \dots, h_i, (h+1)_i, \dots, v_i$  ( $i = 1, 2, \dots, c$ ), und verbinde die  $Sp_i$  durch folgende (zusätzliche) Kanten:  $(1_i, 1_{i+k_1}), (2_i, 2_{i+k_2}), \dots, (h_i, h_{i+k_h})$ , wobei die Indizes der Knotenpunkte (mod  $c$ ) zu nehmen sind.

Der so konstruierte Graph heiße *Speichengraph* (kurz:  $SpG$ ) und werde mit  $G = G(Sp; c, \mathbf{k}) \in \mathbf{G}^3$  bezeichnet, wobei  $Sp \in \mathbf{Sp}(h)$ ,  $c > 1$  und  $\mathbf{k} = [k_1, k_2, \dots, k_h]$  sind. In Abb. 2.2 ist der Speichengraph  $Pf = G(Sp = S_4, 7, [1, 3, 2])$  dargestellt.

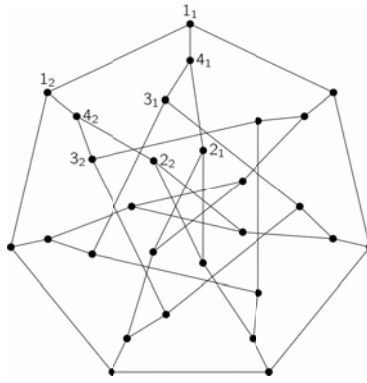


Abb. 2.2 Der SpG Pf = G(Sp = S<sub>4</sub>, c = 7, k = [1, 3, 2])

Es ist leicht zu sehen, dass folgende Isomorphie-Beziehung für Speichengraphen gilt:

$$G = G(\text{Sp}; c, [k_1, k_2, \dots, k_h]) \cong G(\text{Sp}; c, [c - k_1, k_2, \dots, k_h]) \cong \dots \cong G(\text{Sp}; c, [k_1, k_2, \dots, c - k_h])$$

Für  $j = 1, 2, \dots, h'$  ist  $g_j = 1$  und es gibt einen Kreis  $C_j$  mit der Knotenpunktmenge  $V(C_j) = \{j_i, i = 1, 2, \dots, c\}$  und der Kantenmenge  $E(C_j) = \{(j_i, j_{i+k_j}) \text{ Index (mod } c)\}$ . Ist  $g_j > 1$  (für  $h' < j \leq h$ ), so gibt es genau  $g_j$  Kreise der Länge  $c/g_j$ , die hier zur Menge  $C_j$  zusammengefasst werden.

Graph G hat die Knotenpunktmenge  $V(G) = [\bigcup_{i=1}^{i=c} V(\text{Sp}_i)] = \{j_i; j = 1, 2, \dots, v; i = 1, 2, \dots, c\}$  und seine Kantenmenge ist  $E(G) = [\bigcup_{i=1}^{i=c} E(\text{Sp}_i)] \cup [\bigcup_{j=1}^{j=h'} E(C_j)] \cup [\bigcup_{j=h'+1}^{j=h} E(C_j)]$ . Im Falle  $h' = h$  ist  $[\bigcup_{j=h'+1}^{j=h} E(C_j)]$  die leere Menge.

Es sind  $n = n(G) = cv$ ,  $m = m(G) = 3n/2$  und die zyklomatische (zyklotomische) Zahl  $z = z(G)$  von G ist  $z = m - n + 1 = n/2 + 1 = cv/2 + 1..$

Hier werden zusammenhängende Speichengraphen G betrachtet, also  $g_0 = 1$ .

G ist paarer Graph genau dann, wenn die Speiche Sp paarer Graph, c gerade und alle  $k_j$  ungerade sind.

Der gut bekannte Petersen-Graph  $\text{Pe}(5, 2) \in \mathbf{G}^3$  ergibt sich aus  $\text{Sp} = K_{2,}$ ,  $c = 5$  und  $k = [1, 2]$  (s. Abb.1).

#### Bemerkung 2.1:

Fügt man in eine Kante einer Speiche  $\text{Sp} \in \mathbf{Sp}(h)$  einen zusätzlichen Knotenpunkt ein und verbindet diesen mittels zusätzlicher Kante mit einem weiteren zusätzlichen Knotenpunkt, so entsteht eine weitere Speiche  $\text{Sp}' \in \mathbf{Sp}(h + 1)$ . Analog kann auch mit einem kubischen Graphen  $G \in \mathbf{G}^3$  verfahren werden. Außerdem kann auch in zwei Kanten einer Speiche  $\text{Sp} \in \mathbf{Sp}(h)$  je ein Knotenpunkt eingefügt und diese beiden Knotenpunkte durch eine zusätzliche Kante verbunden werden. Das Resultat ist eine Speiche  $\text{Sp}'' \in \mathbf{Sp}(h)$ .

### Bemerkung 2.2:

Mit der Konstruktion von Speichengraph  $G$  verbinde man die vereinfachte Vorstellung, dass  $G$  eine reifenähnliche Gestalt  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(G)$  einnimmt, wobei sich die hängenden Knotenpunkte  $j_i$  ( $i = 1, 2, \dots, c$ ;  $j = 1, 2, \dots, h$ ) von Speiche  $Sp_i$  auf der Oberfläche und die dreivalenten Knotenpunkte von  $Sp_i$  im Inneren von  $\mathfrak{R}$  befinden. Die Knotenpunkte  $j_i$  von  $G$  werden deshalb als *periphere Knotenpunkte* bezeichnet. Diese Struktur ist (in praktischer Hinsicht) besonders dann sinnvoll, wenn  $c \gg 2$ , Speiche  $Sp$  ein planarer Graph ist und alle  $k_j = 1$  sind; dabei stützen die  $c$  Speichen den Reifen  $\mathfrak{R}$ .

### Bemerkung 2.3:

Geben sei Graph  $G = G(Sp; c, \mathbf{k})$  mit  $c = g_0 c_0$ .

Ist  $g_0 = 1$ , so ist der resultierende Graph  $G$  zusammenhängend.

Ist  $g_0 > 1$ , so ergeben sich für Graph  $G$  genau  $g_0$  Kopien des Graphen  $G_0 = G(Sp; c_0, \mathbf{k}_0)$ , wobei  $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}/g_0 = [k_1/g_0, k_2/g_0, \dots, k_h/g_0]$  ist.

## 3. Nomenklatur

Es sei  $a > 2$  eine natürliche Zahl. Die Menge  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(a)$  enthalte alle primen Restklassen bezüglich  $a$ . Die Elemente von  $\mathbf{R}$  bilden mit der multiplikativen Verknüpfung „ $\cdot$ “ eine abelsche Gruppe  $\mathbf{G} = \mathbf{G}(a) = (\mathbf{R}, \cdot)$ . Die Ordnung (die Anzahl der Elemente) von  $\mathbf{G}$  gibt die famose Euler-Funktion  $\varphi(a)$  an; sie hat folgende Eigenschaften:

- Ist  $a = p^b$  Primzahlpotenz, so ergibt sich  $\varphi(a) = \varphi(p^b) = p^b - p^{b-1} = p^b(1 - 1/p)$ ,
- Die Funktion  $\varphi$  ist distributiv. Ist  $\text{ggT}(a', a'') = 1$ , so gilt  $\varphi(a' \cdot a'') = \varphi(a') \cdot \varphi(a'')$ .

Offensichtlich ist  $\varphi(a)$  für jedes  $a > 2$  gerade. Deshalb setzen wir  $\varphi^*(a) = \frac{1}{2} \varphi(a)$ .

Mit  $\mathbf{R} = \{r_q = r_q(a), q = 1, 2, \dots, \varphi(a)\}$  sei  $\mathbf{R}^* = \{r_q = r_q(a), q = 1, 2, \dots, \varphi^*(a), r_q < a/2\}$ .

Gegeben ist der Speichengraph  $G = G(Sp; c, \mathbf{k}) \in \mathbf{G}^3$ ,  $Sp \in \mathbf{Sp}(h)$ .

Neben  $\mathbf{k}$  gibt es (möglicherweise) weitere, von der Speiche  $Sp$  unabhängige  $\mathbf{k}^{(q)} = [k_j^{(q)}; j = 1, 2, \dots, h; 1 \leq q \leq \varphi^*(c)]$  derart, dass jeder der Graphen  $G^{(q)} = G(Sp; c, \mathbf{k}^{(q)})$  zu  $G$  isomorph ist, wobei  $G^{(1)} = G$  gesetzt werde. Diese lassen sich folgendermaßen finden. Ordnet man die in  $\mathbf{k} = \mathbf{k}^{(1)}$  gegebenen  $h$  Zahlen  $k_1, k_2, \dots, k_h$  als erste Zeile einer Matrix  $\mathbf{K} = (k_{qj})$ , also  $k_1 = k_{1j}$ , so können für  $1 < q \leq \varphi^*(c)$  die weiteren Elemente  $k_{qj}$  von  $\mathbf{K}$  mit Hilfe der Kongruenz  $k_{qj} \equiv r_q \cdot k_j \pmod{c}$ ,  $j = 1, 2, \dots, h$  und  $q = 2, 3, \dots, \varphi^*(c)$  gefunden werden. Aus den  $k_{qj}$ -Werten ergeben sich die gesuchten  $k_j^{(q)}$  einfach zu:  $k_j^{(q)} = k_{qj}$ , falls  $k_{qj} < c/2$  und  $k_j^{(q)} = c - k_{qj}$  sonst. Die  $k_j^{(q)}$ -Werte können zur reduzierten Matrix  $\mathbf{K}^{\text{red}} = (k_{qj}^{\text{red}} = k_j^{(q)})$  zusammengefasst werden. Somit sind die zu  $G = G(Sp; c, \mathbf{k})$  isomorphen Speichengraphen  $G^{(q)} = G(Sp; c, \mathbf{k}^{(q)})$   $q = 1, 2, \dots, \varphi^*(c)$  gefunden.

Der SpG  $G = G(Sp; c, \mathbf{k})$  mit  $\mathbf{k} = [1 \leq k_1, k_2, k_3, \dots, k_h]$  werde *uniformer SpG* (kurz: *USpG*) genannt, falls  $h' = h$  ist, also alle  $g_j = 1$  sind.

Ein USpG heiße *einfacher SpG* (kurz: *ESpG*), falls für alle  $j = 1, 2, \dots, h$  die  $k_j = 1$  sind. Hier wird kurz  $\mathbf{k} = \mathbf{1}$  gesetzt, also  $G = G(\text{Sp}; c, \mathbf{1})$ .

Graph  $G = G(\text{Sp}; c, \mathbf{k})$  heiße *zirkulanter SpG* (kurz: *ZSpG*), falls für  $h = \varphi^*(c)$  die Matrix  $\mathbf{K}^{\text{red}}$  (eventuell durch Zeilenvertauschung) eine zirkulante Matrix<sup>(6)</sup> ist.

Die hier gegebene Klassifizierung der Speichengraphen ist unabhängig von der jeweiligen Speiche  $\text{Sp} \in \mathbf{Sp}(h)$ .

Beispiel 3.1:  $c = 18, \mathbf{k} = [5, 7, 3, 4, 6]$ :  $\varphi(18) = \varphi(2 \cdot 3^2) = (2 - 1)(3^2 - 3) = 6$  und  $\varphi^*(18) = 3$ . Hier sind  $h' = 2, h = 5$ :  $\mathbf{R} = \{1, 5, 7, 11, 13, 17\}, \mathbf{R}^* = \{1, 5, 7\}$  und somit für jeden Speichengraph mit der Speiche  $\text{Sp} \in \mathbf{Sp}(5)$  sind

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 & 4 & 6 \\ 7 & 17 & 15 & 2 & 6 \\ 17 & 13 & 3 & 10 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{K}^{\text{red}} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 & 4 & 6 \\ 7 & 1 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Die zu SpG  $G = G^{(1)} = G(\text{Sp}, 18, [5, 7, 3, 4, 6])$  isomorphen SpG sind  $G^{(2)} = G(\text{Sp}, 18, [7, 1, 3, 2, 6])$  und  $G^{(3)} = G(\text{Sp}, 18, [1, 5, 3, 8, 6])$ .

Beispiel 3.2:  $c = 7, \mathbf{k} = [1, 3, 2]$ :  $\varphi(7) = 7 - 1 = 6, \varphi^*(7) = 3$  und  $\mathbf{R}^* = \{1, 2, 3\}$ .

Für jeden Speichengraph mit Speiche  $\text{Sp} \in \mathbf{Sp}(3)$  sind für  $c = 7$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{K}^{\text{red}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit handelt es sich bei dem Graphen  $G = G(\text{Sp}, 7, [1, 3, 2])$  um einen USpG der zugleich ZSpG ist. Die zu  $G = G^{(1)} = G(\text{Sp}, 7, [1, 3, 2])$  isomorphen Speichengraphen sind  $G^{(2)} = G(\text{Sp}, 7, [2, 1, 3])$  und  $G^{(3)} = G(\text{Sp}, 7, [3, 2, 1])$ .

An geeigneten Stellen soll zum Vergleich mit dem Petersen Graphen  $\text{Pe} = G(K_2, 5, [1, 2])$  jeweils eine Bemerkung zum hier interessant erscheinenden SpG  $\text{Pf} = G(S_4, 7, [1, 3, 2])$  erfolgen. Die Speiche  $\text{Sp} = S_4$  ist der Stern mit vier Knotenpunkten (Abb. 2.1).

## 4. Charakteristisches Polynom und Eigenwerte

Graph  $G = G(\text{Sp}; c, \mathbf{k}), \text{Sp} \in \mathbf{Sp}(h)$  und  $1 \leq k_j < c$ , habe die  $n \times n$  Adjazenzmatrix  $\mathbf{A}(G) = (a_{ij'})$ ,  $j, j' = 1, 2, \dots, n$ . Die *Eigenwerte von G* sind die Eigenwerte von  $\mathbf{A}(G)$ . Das *charakteristische Polynom von G* (also von  $\mathbf{A}(G)$ ) ist  $p_G(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}(G))$ ;  $\mathbf{I}_n$  bezeichne die  $n$ -reihige Einheitsmatrix.

Die Berechnung aller Eigenwerte von  $G = G(Sp; c, \mathbf{k})$  kann für  $\mathbf{k} = \mathbf{1}$  unter Ausnutzung der Graphenstruktur recht einfach nach Heilbronner<sup>(7)</sup> und Davidson<sup>(8)</sup> erfolgen. Lovasz<sup>(9)</sup> publizierte eine Methode zur Berechnung der Spektren von Graphen mit transitiver Gruppe. John und Sachs<sup>(10)</sup> geben für  $\mathbf{k} \neq \mathbf{1}$  eine Methode an, welche die Eigenwerte eines symmetrischen Graphen  $G$  mit nicht-trivialer Automorphismengruppe zu berechnen gestattet. Allgemein sei auf das Standardwerk „Spectra of Graphs“ von Cvetkovic', Doob und Sachs<sup>(11)</sup> verwiesen.

Zur weiteren Erklärung wird als Speiche der Graph  $S_4$  aus Abb. 2.1 herangezogen. Für die Berechnung des charakteristischen Polynoms von Graph  $G = G(S_4; c, \mathbf{k})$  wird nach <sup>(10)</sup> zunächst eine geeignete Permutation  $P = P(G)$  der Knotenpunkte von  $G$  benötigt. Die Knotenpunktmenge  $V(G) = [\bigcup_{i=1}^{i=c} V(Sp_i)]$  von  $G$  mit  $V(Sp_i) = \{j_i, j = 1, 2, \dots, v, i = 1, 2, \dots, c\}$  wird in folgende Permutation  $P = P(G) = (Z_1 Z_2 \dots Z_v)$  mit den Zyklen  $Z_j = (j_1, j_2, \dots, j_c)$  und  $j = 1, 2, \dots, v$  zerlegt. Mit dieser Nummerierung der Knotenpunkte von  $G$  kann  $\mathbf{A}(G) = (\mathbf{A}_{ll'})$ ,  $l, l' = 1, 2, \dots, c$  als blockzirkulante Matrix<sup>(5)</sup> mit den Blöcken  $\mathbf{A}_{ll'}$  dargestellt werden. Hierbei sind  $l, l' = i$  zu setzen. Somit können nach <sup>(10)</sup> zur Berechnung von  $p_G(\lambda)$  von  $G$  genau  $c$  Graphen  $L_i = L(Sp_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, c$ , folgendermaßen gefunden werden: man füge an jeden hängenden Knotenpunkt  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, h$ ) von Speiche  $Sp = Sp_i$  eine Schlinge  $s_{ji}$  an, welche das Gewicht  $d_{ji} = d(s_{ji}) = 2\cos(2ik_j \pi / c)$  hat. Dieser Graph werde mit  $L_i = L(Sp_i)$  bezeichnet (Abb. 4.1).

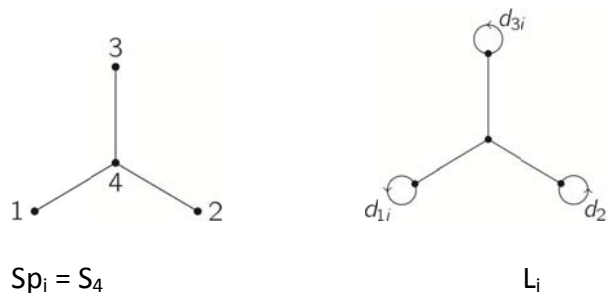


Abb. 4.1: Die Graphen  $Sp_i$  und  $L_i$

#### Satz 4.1<sup>(10)</sup>:

Es sei  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(Sp)$  die Adjazenzmatrix von  $Sp = Sp_i$ ,  $\mathbf{D}_i = (d_{jj'}(i))$ , mit  $j, j' = 1, 2, \dots, v = v(Sp)$ , eine von  $P = P(G)$  abhängige Matrix mit den Diagonalelementen  $d_{jj}(i) = d_{ji} = 2\cos(2ik_j \pi / c)$  für  $j = 1, 2, \dots, h$  und ansonsten ist  $d_{jj'}(i) = 0$ . Graph  $L_i = L(Sp_i)$  hat die Adjazenzmatrix  $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}(L_i) = \mathbf{A}(Sp) + \mathbf{D}_i$  und somit das charakteristische Polynom ist  $p_{L_i}(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I}_v - \mathbf{A}_i)$ .

Das charakteristische Polynom  $p_G(\lambda)$  von  $G = G(Sp; c, \mathbf{k})$  hat die  $i = 1, 2, \dots, c$  Faktoren  $p_{L_i}(\lambda)$  vom Grad  $v$ , also ist

$$p_G(\lambda) = \left[ \prod_{i=1}^{i=c} p_{L_i}(\lambda) \right]. \quad (4.1)$$

#### Folgerung 4.1:

Wegen  $\cos(2ik_j \pi / c) = \cos(2[c - i]k_j \pi / c)$ ,  $i = 1, 2, \dots, c$ ,  $j = 1, 2, \dots, h$ , ist  $p_{L_i}(\lambda) = p_{L(c-i)}(\lambda)$ .

Deshalb kann Gleichung (1) reduziert werden, wobei  $p_{Lc}(\lambda) = p_L(\lambda)$  gesetzt wird:



c ungerade: 
$$p_G(\lambda) = p_L(\lambda) \left[ \prod_{l=1}^{(c-1)/2} p_{Li}(\lambda) \right]^2, \quad (4.2.1)$$

und

c gerade: 
$$p_G(\lambda) = p_L(\lambda) p_{Lc/2}(\lambda) \left[ \prod_{l=1}^{(c-2)/2} p_{Li}(\lambda) \right]^2. \quad (4.2.2)$$

Mit den c Polynomen  $p_{Li}(\lambda)$  können die Eigenwerte von  $G = G(\text{Sp}; c, k)$  berechnet werden.

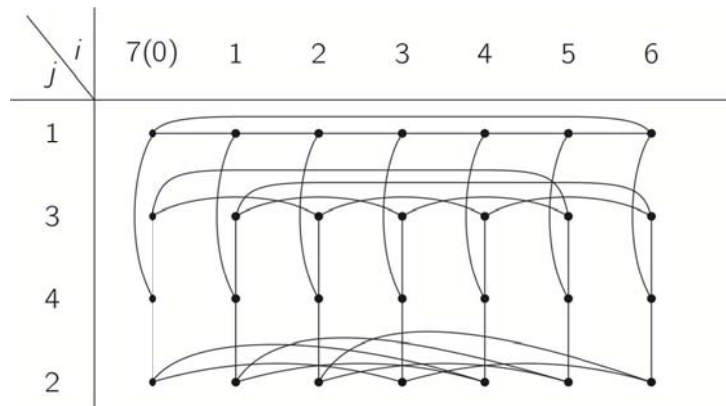


Abb. 4.2: Graph Pf gemäß Permutation  $P = P(G)$

#### Beispiel 4.1:

Gegeben sei der in Abb. 2.2 dargestellte Speichengraph  $\text{Pf} = G(\text{Sp} = S_4; c = 7, \mathbf{k} = [1, 3, 2])$ . Als Permutation wird  $P = P(G) = (Z_1 Z_2 Z_3 Z_4)$  mit den Zyklen  $Z_j = (j_1, j_2, \dots, j_7)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  gewählt und Graph Pf entsprechend angeordnet (siehe Abb. 4.2). Somit resultieren nach <sup>(10)</sup> für  $i = 1, 2, \dots, 7$  die Graphen  $L_i$  (Abb. 4.1) für die jeweils das Polynom  $p_{Li}(\lambda)$  mit Hilfe der Matrix  $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}(L_i)$  berechnet werden kann. Es ist

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{A}(S_4) + \mathbf{D}_i = \begin{pmatrix} d_{1i} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & d_{2i} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & d_{3i} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{mit } d_{ji} = d(s_{ji}) = 2\cos(2ik_j \pi / c). \quad (4.2)$$

Wegen Satz 4.1 ergeben sich für  $i = 1, 2, \dots, 7$  die Faktoren  $p_{Li}(\lambda)$  von Graph Pf allgemein zu

$$p_{Li}(\lambda) = \lambda^4 - (d_{1i} + d_{2i} + d_{3i}) \lambda^3 + (d_{1i}d_{2i} + d_{2i}d_{3i} + d_{3i}d_{1i} - 3) \lambda^2 - (d_{1i}d_{2i}d_{3i} - 2(d_{1i} + d_{2i} + d_{3i})) \lambda - (d_{1i}d_{2i} + d_{2i}d_{3i} + d_{3i}d_{1i}). \quad (4.3)$$

Mit  $\mathbf{k} = [1, 3, 2]$  sind  $d_{1i} = 2\cos(2i\pi/7)$ ,  $d_{2i} = 2\cos(6i\pi/7)$ ,  $d_{3i} = 2\cos(4i\pi/7)$  und für die sieben Faktorpolynome  $p_{Li}(\lambda)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 7$ , des Graphen Pf ergeben sich

für  $i = 7$

$$p_L(\lambda) = p_{Lc}(\lambda) = \lambda^4 - 6\lambda^3 + 9\lambda^2 + 4\lambda - 12 = (\lambda - 3)(\lambda - 2)^2(\lambda + 1)$$

und für  $i = 1, 2, 3$  ist

$$p_{L1}(\lambda) = p_{L2}(\lambda) = p_{L3}(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 - 5\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)(\lambda^2 + 2\lambda - 1),$$

woraus z. B. mit Folgerung (4.1) die übrigen Faktorpolynome bekannt sind:

$$p_{L4}(\lambda) = p_{L5}(\lambda) = p_{L6}(\lambda) = p_{L1}(\lambda).$$

Somit ist das charakteristische Polynom  $p_{Pf}(\lambda)$  von Speichengraph Pf nach Gleichung (4.1) bzw. Gleichung (4.2.1) gegeben zu

$$p_{Pf}(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 2)^8(\lambda + 1)^7(\lambda^2 + 2\lambda - 1)^6.$$

Graph Pf =  $G(S_4; c = 7, \mathbf{k} = [1, 3, 2])$  hat die Eigenwerte  $3, 2^{(8)}, 0.414^{(6)}, -1^{(7)}, -2.414^{(6)}$ . Die Hochzahlen in Klammern geben die Vielfachheit des jeweiligen Eigenwertes an.

#### Bemerkung 4.1:

Ist der Graph  $L_i$  symmetrisch, so kann im Allgemeinen jedes Polynom  $p_{L_i}(\lambda)$  auf einfache Weise in weitere Faktoren zerlegt werden.

Einen *Sonnengraph*  $So_{2h}$  erhält man, indem an jeden Knotenpunkt des Kreises  $C_h$  mit einem weiteren Knotenpunkt durch eine Kante verbunden wird. Wählt man z. B. als Speicher den Graphen  $Sp = So_{10} \in \mathbf{Sp}(5)$ , siehe Abb. 4.3,  $c > 1$  und  $\mathbf{k} = \mathbf{1}$ , so ergibt sich der Graph  $Go_3 = G(So_{10}, 3, \mathbf{1})$ , wobei für diesen  $L_{a,b}$  aus dem  $K_2$  mit je einer Schlinge an jedem Knotenpunkt vom Gewicht  $d(a) = 2\cos(2a\pi/c)$  bzw.  $d(b) = 2\cos(2b\pi/5)$ ,  $a = 0, 1, \dots, c-1=2$  und  $b = 0, 1, \dots, h-1=4$ , gebildet wird (Abb. 4.3). Die Adjazenzmatrix von  $L_{a,b}$  ist

$$\mathbf{A}(L_{a,b}) = \mathbf{A}(K_2) + \mathbf{D}_{a,b} = \begin{pmatrix} d(a) & 1 \\ 1 & d(b) \end{pmatrix}.$$

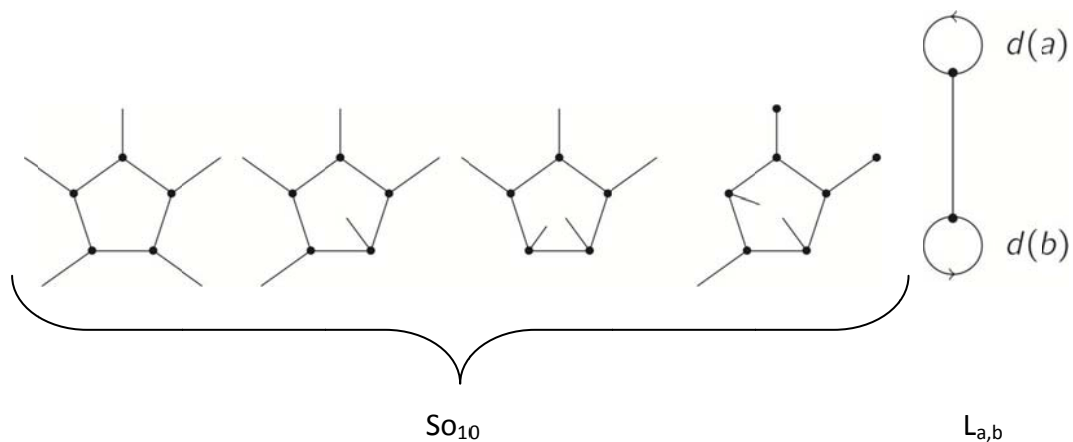


Abb. 4.3: Speicher  $So_{10}$ , drei Ausnahmen von  $So_{10}$  und der Graph  $L_{a,b}$

Somit ergibt sich für  $L_{a,b}$  zunächst das Polynom

$$p_{L_i}(\lambda) = \lambda^2 - 2(\cos(2a\pi/3) + \cos(2b\pi/5))\lambda + 4\cos(2a\pi/3)\cos(2b\pi/5) - 1.$$

Für  $c = 3$ ,  $a = 0, 1, 2$  und  $b = 0, 1, \dots, 4$  erhält man die Zerlegung des Polynoms  $p_{Go_3}(\lambda)$  von Graph  $Go_3$  in die 15 Faktoren  $p_{L_{a,b}}(\lambda)$ :

$$p_{L_{0,0}}(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3),$$

$$p_{L_{0,1}}(\lambda) = p_{L_{0,4}}(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})\lambda - (2 - \sqrt{5}),$$

$$p_{L_{0,2}}(\lambda) = p_{L_{0,3}}(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})\lambda - (2 + \sqrt{5}),$$

$$p_{L_{1,0}}(\lambda) = p_{Sp2,0}(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 3,$$

$$p_{L1,1}(\lambda) = p_{L1,4}(\lambda) = p_{L2,1}(\lambda) = p_{L2,4}(\lambda) = \lambda^2 + \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})\lambda - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \text{ und}$$

$$p_{L1,2}(\lambda) = p_{L1,3}(\lambda) = p_{L2,2}(\lambda) = p_{L2,3}(\lambda) = \lambda^2 + \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})\lambda - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}).$$

Somit ist

$$p_{G03}(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda^2 - 3\lambda - 3)^2(\lambda^4 - 3\lambda^3 - 3\lambda^2 + 11\lambda - 1)^2(\lambda^4 - 3\lambda^3 - 4\lambda - 1)^4.$$

Einfache Überlegungen ergeben den folgenden

#### Satz 4.2:

Es seien  $G_{0p} = G(\text{So}_{2q}, p, \mathbf{1})$  und  $G_{0q} = G(\text{So}_{2p}, q, \mathbf{1})$  zwei Speichengraphen mit den Speichen  $\text{So}_{2q}, \text{So}_{2p}$  und  $p, q > 1$  natürliche Zahlen. Die zwei Graphen  $G_{0p}$  und  $G_{0q}$  sind isomorph, kurz  $G_{0p} = G(\text{So}_{2q}, p, \mathbf{1}) \cong G(\text{So}_{2p}, q, \mathbf{1}) = G_{0q}$ . (4.3)

Man beachte, dass im Graphen  $L_{a,b}$  die Knotengewichte  $d(a)$  und  $d(b)$  vertauscht werden können. Andererseits sind die hängenden Kanten der  $p$  Speichen  $\text{So}_{2q}$  von  $G_{0p}$  mit den hängenden Kanten der  $q$  Speichen  $\text{So}_{2p}$  von  $G_{0q}$  identisch. ☺

#### Bemerkung 4.2:

Es sei  $G$  ein Graph mit der Knotenpunktmenge  $V = V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$ , der Kantenmenge  $E = E(G)$  und der Adjazenzmatrix  $A = A(G)$ .  $G'$  sei ein weiterer Graph mit  $n' > n$  Knotenpunkten, die folgendermaßen markiert werden: Für alle  $k, l \in V$  erhalte jeder Knotenpunkt von  $G'$  mit Marke  $k$  genau einen Nachbarknotenpunkt der Marke  $l$ . Das bedeutet, dass die Markierung von  $G$  einen lokal homöomorphen Homomorphismus von  $G'$  auf  $G$  darstellt. Sei  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  ein Eigenvektor von  $G$ , der zum Eigenwert  $\lambda$  gehört. Die  $k$ -te Komponente ( $k \in V$ ) von Vektor  $u$  ist  $u_k$ . Deshalb wird jedem von  $G'$  mit  $k$  markierten Knotenpunkt im Vektor  $u' = (u'_1, u'_2, \dots, u'_{n'})$  ebenfalls der Wert  $u_k$  zugeordnet. Der so gefundene Vektor  $u'$  ist ein Eigenvektor von  $G'$  zum Eigenwert  $\lambda$ . Somit ist Graph  $G$  ein *Divisor* von Graph  $G'$ , also kurz  $G | G'$  bzw.  $p_G(\lambda) | p_{G'}(\lambda)$ .

#### Satz 5.1.1:

Für  $G = G(\text{Sp}; c, \mathbf{k})$  und  $G' = G(\text{Sp}; c', \mathbf{k})$ ,  $\text{Sp} \in \mathbf{Sp}(h)$  und  $h > 1$  sei  $c > 1$  ein Teiler von  $c'$ , also  $c' = rc, r \geq 1$ .

Dann ist  $p_{G'}(\lambda) = p_G(\lambda) q_{c',c}(\lambda)$ .

Hierbei hat das Quotientenpolynom  $q_{c',c}(\lambda)$  den Grad  $v(r-1)c$ .

#### Beweis:

Die Graphen  $G$  und  $G'$  haben die Knotenpunktmenge  $V = V(G) = \{j_i, j = 1, 2, \dots, v; i = 1, 2, \dots, c\}$  bzw.  $V' = V(G') = \{j_{i'}, j = 1, 2, \dots, v; i' = 1, 2, \dots, c'\}$ . Eine geeignete Zuordnung der Knotenpunkte von  $G'$  zu den Knotenpunkten von  $G$  ist folgende: Knotenpunkt  $j_{i'}$  von  $G'$  werde der Knotenpunkt  $j_i$  von  $G$  zugeordnet, falls  $i' \equiv i, \text{ mod } c$  ist.

Man betrachte nur die peripheren Knotenpunkte von  $G$  bzw. von  $G'$ , also  $j = 1, 2, \dots, h$ .

In  $G$  ist Knotenpunkt  $j_i$  mit den beiden Knotenpunkten  $j_{i-kj}$  und  $j_{i+kj}$  verbunden, wobei die Indizes mod  $c$  zu nehmen sind. Analog verhält es sich bei Graph  $G'$ . Hier ist  $j_{i'}$  mit  $j_{i'-kj}$  und  $j_{i'+kj}$  verbunden und die Indizes werden mod  $c'$  genommen.

Sind  $1 \leq x_j \leq k_j$ ,  $1 \leq j \leq h$  und  $1 \leq s \leq r$ , so werden in  $G'$  die Kanten  $(j_{sc-kj+xj}, j_{sc-xj})$  durch die Kanten  $(j_{sc-kj+xj}, j_{(s-1)c+xj})$  ersetzt. Das Ergebnis sind  $r$  Kopien des Speichengraphen  $G$ .  
 ☺

## 5. Der ESpG $G_c = G(S_4; c, 1)$

In Abb. 5.1 sind der Speichengraph  $Sp = S_4$  (siehe Abb. 2.1) und der Graph  $G_4 = (S_4, 4, 1)$  dargestellt.

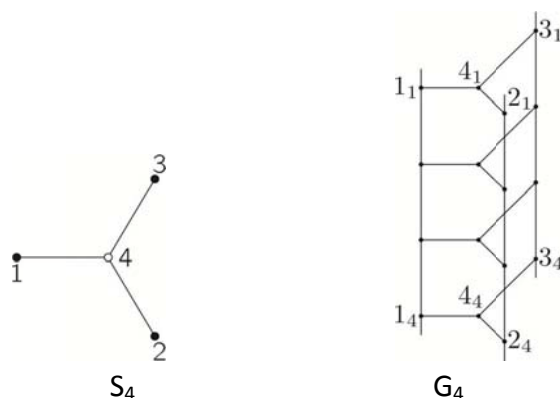


Abb. 5.1 Die Graphen  $S_4, G_4$

Für den Graphen  $G_c = G(S_4; c, 1)$ ,  $c > 1$ , gibt es folgende einfache Symmetrieelemente: Bezüglich des Speichengraphen  $S_4$  sind es insgesamt 6, und zwar die Identität und jeweils drei Drehungen  $\delta_3$  (um  $2\pi/3$ ) und drei Spiegelungen  $\sigma_3$ . Für den Graphen  $G_c$  ergeben sich, von den peripheren Kreisen aus betrachtet, genau  $c$  Drehungen  $\delta'_c$  (um  $2\pi/c$ ) und für  $c$  ungerade (gerade) ebenso (doppelt so-) viele Spiegelungen  $\sigma'_c$  ( $\sigma''_c$ ). Durch Kombination von diesen Symmetrieelemente können alle weiteren Symmetrien von Graph  $G_c$  gefunden werden.

An dieser Stelle sollen einige Eigenschaften von  $G_c$  untersucht werden (siehe  $G_4$  in Abb. 5.1).

### 5.1 Charakteristisches Polynom und ausgewählte Eigenwerte

Für jeden paaren Graphen  $G$  gilt: Ist  $\lambda$  \* Eigenwert von  $G$ , so auch  $-\lambda$  \*.

Da Speiche  $S_4$  bipartit ist, wird Graph  $G_c$  genau dann paarer Graph sein, falls  $c$  gerade ist.

Aus Gleichung (4.2) und  $k = 1$  folgen für  $p_{G_c}(\lambda)$  in Abhängigkeit von  $d_i$  die  $c$  Faktoren  $p_{Li}(\lambda)$ ,  $i = 1, 2, \dots, c$ , zu

$$p_{Li}(\lambda) = \lambda^4 - 3d_i\lambda^3 + 3(d_i^2 - 1)\lambda^2 - (d_i^3 - 6d_i)\lambda - 3d_i^2 = (\lambda - d_i)^2(\lambda^2 - d_i\lambda - 3), \quad (5.1)$$

wobei  $d_i = 2\cos(2i\pi/c)$  gesetzt wird.

Gleichung (5.1) gestattet es, spezielle Eigenwerte mit ihren Vielfachheiten für geeignete  $i$ -Werte durch Einsetzen von  $i = 0, c/6, c/4, c/3, c/2, 2c/3, 3c/4, 5c/6$  sofort zu ermitteln (Tabelle 1).

Tabelle 1 ( $i = 0$  entspricht  $i = c$ )

$i =$	0	$c/2$	$c/4, 3c/4$	$c/3, 2c/3$	$c/6, 5c/6$
$\lambda_{1,2} =$	2	-2	0	-1	1
$\lambda_{3,4} =$	3, -1	1, -3	$\pm \sqrt{3}$	$1/2(-1 \pm \sqrt{13})$	$1/2(1 \pm \sqrt{13})$

Eine mitunter nützliche Operation ist das *switchen* eines Graphen  $G$  bezüglich einer Teilmenge  $W$  der Knotenpunktmenge  $V(G)$  von  $G$ , welche  $G$  in einen kantengewichteten Graphen  $G^W$  überführt. Während alle Kanten von  $G$  in seine Adjazenzmatrix  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(G)$  mit dem Gewicht 1 eingehen, ergibt sich  $\mathbf{A}^W = \mathbf{A}(G^W)$ , indem alle den Knotenpunkten aus  $W$  zugeordneten Zeilen und Spalten von  $\mathbf{A}$  mit  $(-1)$  multipliziert werden. Gibt es  $W$  so, dass alle Kanten von  $G^W$  das Gewicht  $(-1)$  haben, so ist  $\mathbf{A}^W = -\mathbf{A}$  und somit  $p_G(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = (-1)^n \det(-\lambda \mathbf{I}_n + \mathbf{A}) = (-1)^n \det(-\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}^W) = (-1)^n p_{G^W}(-\lambda)$ .

#### Satz 5.1.2:

Ist  $c = 2c'$ ,  $c'$  ungerade, so gilt  $p_{G_c}(\lambda) = p_{G_{c'}}(\lambda) p_{G_c}(-\lambda)$ . (5.2)

#### Beweis von Satz 5.1.2:

Zunächst wählen wir in  $G_c$  einen Schnitt  $S = \{(j_1, j_c), (j_{c'}, j_{c'+1}), j = 1, 2, 3\}$ , löschen diese sechs Kanten und erhalten zwei identische Graphen  $G_{c'}$ , in denen sich die entsprechenden Knotenpunkte jeweils im Index um  $c'$  unterscheiden. In jedem werden drei neue gewichtete Kanten eingefügt, und zwar mit  $(+1)$  gewichtete Kanten  $(j_1, j_{c'})$ , was den Graph  $G_{c'}$  ergibt, und weiterhin drei mit  $(-1)$  gewichteten Kanten  $(j_{c'+1}, j_c)$ , wodurch der Graph  $G_{c^*}$  folgt. Auf den Graphen  $G_{c^*}$  werde nun die switching-Operation angewandt. Dazu wähle man die mit der Knotenpunktmenge  $W = \{4_{c'+1}, 4_{c'+3}, \dots, 4_c\} \cup \{j_{c'+2}, j_{c'+4}, \dots, j_{c-1}; j = 1, 2, 3\}$  von  $G_c$  korrespondierende Menge von  $G_{c^*}$  aus. Ist  $c' \equiv c - 1 \pmod{2}$ , also  $c'$  ungerade, so sind alle mit  $(+1)$  gewichteten Kanten von  $G_{c^*}$  erfasst und wir haben den Graphen  $G_{c^*}^W = G_{c''}$ . Die Graphen  $G_{c'}$  und  $G_{c''}$  unterscheiden sich nur durch ihre Kantengewichte  $(+1)$  bzw.  $(-1)$ . Somit ist  $p_{G_{c'}}(\lambda) = p_{G_{c''}}(-\lambda)$  und demzufolge  $p_{G_c}(\lambda) = p_{G_{c'}}(\lambda) p_{G_{c''}}(\lambda) = p_{G_{c'}}(\lambda) p_{G_{c'}}(-\lambda)$ . ☺

Es sei angemerkt, dass im Falle  $c'$  gerade eine alle mit  $(-1)$  gewichteten Kanten überdeckende Knotenpunktmenge in  $G_{c''}$  nicht existieren kann.

## 5.2 Determinante der Adjazenzmatrix

Mit  $p_{G_c}(\lambda) = \left[ \prod_{i=1}^{i=c} p_{Li}(\lambda) \right]$  ergibt sich  $a(G_c) = \left| \det(\mathbf{A}(G_c)) \right| = \left| p_{G_c}(0) \right| = \left| \prod_{i=1}^{i=c} p_{Li}(0) \right|$ .

Weiter ist mit Gleichung (5.1)  $\left| p_{Li}(0) \right| = 3d_i^2 = 12 \cos^2(2i\pi/c)$  und damit

$$a(G_c) = 3^c \left\{ \prod_{i=1}^{i=c} [2 \cos(2i\pi/c)]^2 \right\}.$$

(5.3)

Aus den beiden Produktformeln (I. M. Ryshik und I. S. Gradstein<sup>(12)</sup>, Seite 34)

$$q \text{ gerade: } 2^{q-1} \left[ \prod_{l=0}^{l=q-1} \cos(x + 2l\pi/q) \right] = (-1)^{q/2} - \cos(qx), \text{ und}$$

$$q \text{ ungerade: } 2^{q-1} \left[ \prod_{l=0}^{l=q-1} \cos(x + 2l\pi/q) \right] = \cos(qx)$$

erhält man für  $x = 0$  und  $l \geq 0$

$$\text{für } q = 4k: \quad \prod_{i=1}^{i=q} (2 \cos(2i\pi/q)) = 0,$$

$$\text{für } q = 2k + 1: \quad \prod_{i=1}^{i=q} (2 \cos(2i\pi/q)) = 2 \text{ und}$$

$$\text{für } q = 4k + 2: \quad \prod_{i=1}^{i=q} (2 \cos(2i\pi/q)) = -4.$$

Somit ergibt sich der

Satz 5.2.1:

Der Wert  $a(G_c) = \left| \det(\mathbf{A}(G_c)) \right|$  ist

$$\text{für } c \equiv 0, \text{ mod } 4: \quad a(G_c) = 0,$$

$$\text{für } c \equiv 1, \text{ mod } 2: \quad a(G_c) = 2^2 3^c \text{ und} \quad (5.4)$$

$$\text{für } c \equiv 2, \text{ mod } 4: \quad a(G_c) = 2^4 3^c.$$



## 5.3 Anzahl der Gerüste

Ein *Gerüst*  $T = T(G)$  eines Graphen  $G$  ist ein *Baum* (ein kreisloser zusammenhängender Graph), für den  $V(T) = V(G)$  und  $E(T) \subseteq E(G)$  sind. Mit  $t = t(G)$  werde die Anzahl aller Gerüste von Graph  $G$  bezeichnet.

Satz 5.3.1 (Hutschenreuther<sup>(11, Seite 39)</sup>): Graph  $G$  sei  $r$ -regulär, habe  $n$  Knotenpunkte und die Eigenwerte  $\mu_0 = r > \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_{n-1}$ .

$$\text{Dann ist } t(G) = (1/n) \left[ \prod_{i=1}^{n-1} (r - \mu_i) \right] = (1/n) p_G'(r) \text{ und } p_G'(\lambda) = d/d\lambda (p_G(\lambda)). \quad (5.5)$$

Das Spektrum bzw. das charakteristische Polynom des  $\text{Sp}G$   $G_c = G(\text{Sp}; c, \mathbf{1})$  ist nach der oben beschriebenen Methode bekannt, sodass mit  $r = 3$  die Gerüstzahl  $t(G_c)$  von  $G_c$  mit Gleichung (5.5) berechnet werden kann.

Graph  $G_c = G(S_4; c, \mathbf{1})$  hat für  $i = 1, 2, \dots, c$  die Eigenwerte (Gleichung 5.1)

$$\lambda_{1,2}(i) = d_i = 2\cos(2i\pi/c) \text{ und}$$

$$\lambda_{3,4}(i) = d_i/2 \pm (d_i^2/4 + 3)^{1/2} = \cos(2i\pi/c) \pm (\cos^2(2i\pi/c) + 3)^{1/2}.$$

Für  $i = c$  ergeben sich  $\lambda_{1,2}(c) = 2$ ,  $\lambda_3(c) = 3$  (geht in Gleichung (5.5) nicht ein) sowie  $\lambda_4(c) = -1$ , womit der Faktor  $(3 - 2)^2(3 - (-1)) = 4$  in  $t(G_c)$  zu berücksichtigen ist.

Weiter sind für  $1 \leq i < c$ :

$$(3 - \lambda_1(i))(3 - \lambda_2(i)) = (3 - 2\cos(2i\pi/c))^2 \text{ und}$$

$$(3 - \lambda_3(i))(3 - \lambda_4(i)) =$$

$$= (3 - \cos(2i\pi/c) - (\cos^2(2i\pi/c) + 3)^{1/2})(3 - \cos(2i\pi/c) + (\cos^2(2i\pi/c) + 3)^{1/2}) =$$

$$= 6(1 - \cos(2i\pi/c)).$$

Mit Gleichung (5.5) erhält man nun für die Anzahl der Gerüste von  $G_c$  nach einfacher Umformung:

$$t(G_c) = 6^{c-1}/c \left[ \prod_{i=1}^{c-1} (3 - 2\cos(2i\pi/c))^2 (1 - \cos(2i\pi/c)) \right].$$

Sei  $f(i) = (3 - 2\cos(2i\pi/c))^2 (1 - \cos(2i\pi/c))$ . Da die Kosinusfunktion gerade ist, kann das Produkt über  $i$  in Abhängigkeit von  $c$  weiter reduziert werden und es ergibt sich der

### Satz 5.3.2:

Mit den gegebenen Bezeichnungen gelten für  $G_c$

$$t(G_c) = 6^{c-1}/c \left[ \prod_{i=1}^u f(i) \right]^2 \quad \text{für } c = 2u + 1 \text{ und}$$

$$t(G_c) = 2^{15} 6^{c-1}/c \left[ \prod_{i=1}^{u-1} f(i) \right]^2 \quad \text{für } c = 2u > 2. \quad \text{☺} \quad (5.6)$$

Für kleine  $c$  sind in Tabelle 2 die mit MAPLE<sup>(13)</sup> berechneten Werte für  $t(G_c)$  und die Quotienten  $q(G_c) = \ln(t(G_c)) / n(G_c)$  angegeben.

### Tabelle 2:

$c$	2	3	4	5	6	7	...	150
$t(G_c)$	150	6912	218700	5929605	149299200	3609254943	...	–
$q(G_c)$	0.62633	0.73675	0.76847	0.77977	0.78423	0.78596	...	0.76239

## 5.4 Anzahl der Linearfaktoren

Ein *Matching* eines (beliebigen) Graphen  $G \in \mathbf{G}$  ist eine Menge knotendisjunkter Kanten von  $G$ . Matching  $M$  heiße *maximum*, falls es die größtmögliche Kantenanzahl von  $G$  besitzt. Ein Matching, welches alle Knotenpunkte von  $G$  überdeckt, ist ein *Linearfaktor* (*1-Faktor*, *perfektes Matching*, kurz: LF).

Sei  $e$  eine Kante von  $G$ . Die Anzahl der LF-en von  $G$  werde mit  $lf = lf(G)$  und die Anzahl der LF-en die die Kante  $e$  von  $G$  enthalten oder nicht enthalten werde mit  $r(e) = r(e, G)$  bzw.  $b(e) = b(e, G)$  bezeichnet. Sind alle LF-en von  $G$  gleichwahrscheinlich, so gibt  $p(e) = p(e, G) = r(e)/lf(G)$  die Wahrscheinlichkeit an, Kante  $e$  in einem LF von  $G$  zu finden.

Ist  $\text{lf}(G) > 0$  und haben die drei Kanten  $e'$ ,  $e''$  und  $e'''$  von  $G$  einen Endknotenpunkt gemeinsam, so ist  $p(e') + p(e'') + p(e''') = 1$ .

Beobachtung: Der Graph  $G_{c>1} = G(S_4; c, 1)$  hat einen Linearfaktor.

Beweis:

Ist  $c > 1$  und gerade, so wähle man z. B. die Kanten  $(1_i, 4_i)$ ,  $i = 1, \dots, c$ , als Kanten eines Linearfaktors. Die beiden peripheren Kreise  $C_2$  und  $C_3$  haben gerade Länge.

Ist  $c = 3$ , wähle man die Kanten  $(1_1, 4_1)$ ,  $(2_2, 4_2)$  und  $(3_3, 4_3)$  als Kanten eines Linearfaktors. Von jedem peripheren Kreis verbleibt noch genau eine Kante für einen Linearfaktor von  $G_3$  (Abb. 5.2 links). Ist  $c > 3$  und ungerade, so kann mittels Einfügen eines Teiles von  $G_2$  mit LF (Abb. 5.2 rechts) in  $G_c$  gezeigt werden, dass auch  $G_c$ ,  $c > 3$  und ungerade, wenigstens einen Linearfaktor hat. ☺

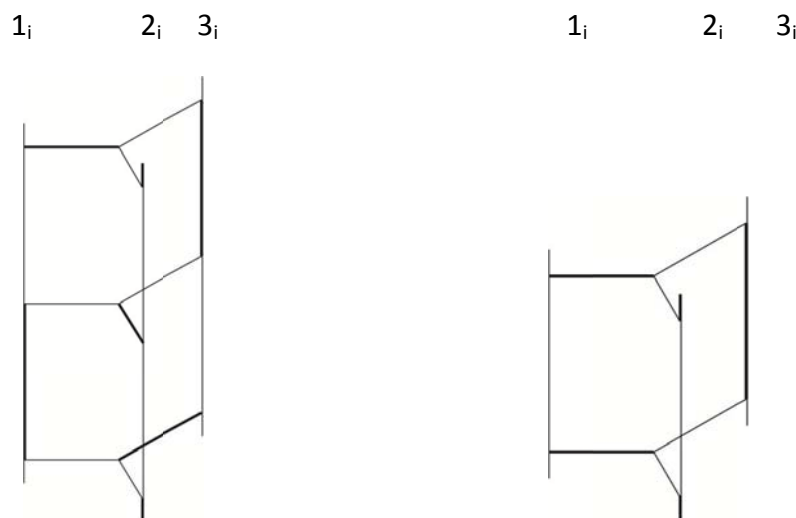


Abb. 5.2 Die Graphen  $G_2$  und  $G_3$  mit einem Linearfaktor

Satz 5.4.1:

Die Wahrscheinlichkeit, eine beliebige Kante  $e$  in einem Linearfaktor von  $G_c$  anzutreffen, hat den Wert  $p(e) = 1/3$ .

Beweis von Satz 5.4.1:

$G_c$  kann durch Drehung um  $\delta_3$  bzw.  $\delta_c'/\delta_c''$  mit sich zur Deckung gebracht werden. Wegen  $\delta_3$  haben jeweils alle drei Kanten einer Speiche von  $G_c$  den gleichen Wert  $1/3$ . Da durch  $\delta_3$  und  $\delta_c'/\delta_c''$  die peripheren Kreise  $C_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) von  $G$  jeweils auf sich selbst abgebildet werden, müssen deren Kanten ebenfalls den Wert  $1/3$  haben. ☺



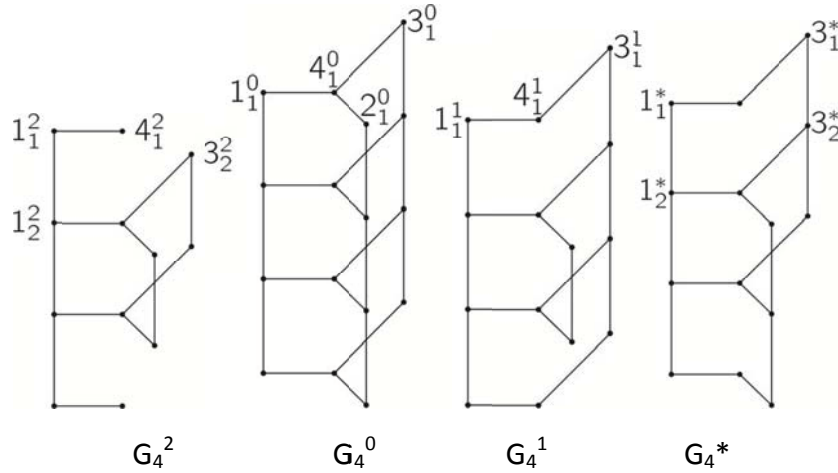


Abb. 5.3: Die Graphen  $G_4^0$ ,  $G_4^1$ ,  $G_4^2$  und  $G_4^*$

Es seien  $G = (V, E) \in \mathbf{G}$  ein Graph mit der Knotenpunktmenge  $V = V(G)$ , der Kantenmenge  $E = E(G)$ , und es seien  $x, y \in V(G)$  sowie  $e = (x, y) \in E(G)$ . Werden in  $G$  Knotenpunkt  $x$  und alle mit ihm inzidierenden Kanten bzw. Kante  $e = (x, y)$  gelöscht, so erhält man den Graphen  $G - x$  bzw.  $G - (x, y)$ .

Man wähle  $E^0 = E^0(G_c) = \{(1_1, 1_c), (2_1, 2_c), (3_1, 3_c)\}$  und einen Linearfaktor  $LF = LF(G_c)$  von  $G_c = G(S_4, c > 1, 1)$ . Für  $k = 0, 1, 2$  sei  $LF^k = LF^k(G_c)$  ein Linearfaktor, welcher genau  $k$  Kanten von  $E^0$  enthält. Man beachte, dass der Fall  $k = 3$  nicht eintreten kann. Löscht man in  $G_c$  die  $k$  Kanten mit ihren Endknotenpunkten und außerdem die verbleibenden  $(3 - k)$  Kanten von  $E^0$ , so erhält man den Graphen  $G_c^k$  (In Abb. 5.3 für den SpG  $G_4$  dargestellt).

Es sind  $G_c^0 = G_c - E^0 = G_c - (1_1, 1_c) - (2_1, 2_c) - (3_1, 3_c)$ ,  $G_c^1 \cong G_c - 1_1 - 1_c - (2_1, 2_c) - (3_1, 3_c) \cong G_c - (1_1, 1_c) - 2_1 - 2_c - (3_1, 3_c) \cong G_c^0 - 1_1^0 - 1_c^0 \cong \dots$ , und  $G_c^2 \cong G_c - 1_1 - 1_c - 2_1 - 2_c - (3_1, 3_c) \cong G_c - 1_1 - 1_c - (2_1, 2_c) - 3_1 - 3_c \cong G_c^0 - 2_1 - 2_c - 3_1 - 3_c \cong \dots$ .

Jeder Knotenpunkt  $j_i$  von  $G_c$  der nicht in  $G_c^k$  gelöscht wurde, wird mit  $j_i^k$  bezeichnet ( $j = 1, 2, 3, 4$  und  $i = 1, 2, \dots, c$ ).

Der folgende Satz gibt die Anzahl  $lf(G_c)$  der Linearfaktoren von  $G_c$  an:

#### Satz 5.4.1:

Für  $c > 1$  ist

$$lf(G_c) = 2lf(G_c^0) + lf(G_c^1) = 2a3^{c/2} + 2^c + 2(-1)^c, \quad (5.6)$$

wobei  $a = 0$  ( $c$  ungerade) oder  $a = 1$  ( $c$  gerade) gesetzt wird.

#### Beweis von Satz 5.4.1:

1)  $k = 0$ : Es ist  $G_c^0 = G_c - E^0$ . Außerdem findet man leicht, dass  $lf(G_2^0) = 3$  und  $lf(G_3^0) = 0$  sind.

$LF^0$  sei ein Linearfaktor von  $G_{c>3}^0$ , der die Kante  $(1_c^0, 4_c^0)$  und somit auch die Kanten  $(2_{c-1}^0, 2_c^0)$ ,  $(3_{c-1}^0, 3_c^0)$  und  $(1_{c-1}^0, 4_{c-1}^0)$  enthält. Nach dem Löschen dieser Kanten mit ihren Endknotenpunkten bleibt der Graph  $G_{c-2}^0$  übrig. Somit ergibt sich  $lf(G_c^0) = 3lf(G_{c-2}^0)$ .

Mit den gegebenen Anfangswerten für  $c = 2$  und  $c = 3$  ist  $lf(G_c^0) = 3^{c/2}$  für gerades  $c$  und  $lf(G_c^0) = 0$  für ungerades  $c$ .

2)  $k=2$ : Es sind  $\text{lf}(G_2^2) = 3$  (für alle drei Möglichkeiten!),  $\text{lf}(G_3^2) = 0$  und für  $G_{c>3}^2 \cong G_c^0 - 2_1^0 - 2_c^0 - 3_1^0 - 3_c^0$ , ergibt sich somit  $\text{lf}(G_c^2) = 3\text{lf}(G_{c-2}^0) = \text{lf}(G_c^0)$ .

3)  $k=1$ : Mit  $G_c^1 \cong G_c^0 - 2_1 - 2_c$  seien Kante  $(1_c^1, 4_c^1)$  und somit  $(3_{c-1}^1, 3_c^1)$  im  $\text{LF}^1$  von  $G_c^1$  enthalten. Somit ist der resultierende Graph  $G_c^1 - 1_c^1 - 4_c^1 - 3_{c-1}^1 - 3_c^1 \cong G_{c-1}^*$ .

In  $G_{c-1}^*$  löschen wir die Knotenpunkte  $1_{c-1}^*$ ,  $4_{c-1}^*$ ,  $2_{c-1}^*$  und  $2_{c-2}^*$ , womit ein Graph isomorph zu  $G_{c-2}^1$  erhalten wird. Werden andererseits in  $G_{c-1}^*$  die Knotenpunkte  $2_{c-1}^*$ ,  $4_{c-1}^*$ ,  $1_{c-1}^*$ ,  $1_{c-2}^*$  gelöscht, so hat man einen Graphen isomorph zu  $G_{c-2}^*$ .

Also sind für  $c > 3$ :  $\text{lf}(G_c^1) = 2\text{lf}(G_{c-1}^*)$ ,  $\text{lf}(G_{c-1}^*) = \text{lf}(G_{c-2}^*) + \text{lf}(G_{c-2}^1)$  und somit  $\text{lf}(G_c^1) = \text{lf}(G_{c-1}^1) + 2\text{lf}(G_{c-2}^1)$ .

Mit  $\text{lf}(G_2^1) = \text{lf}(G_3^1) = 3 \cdot 2 = 6$  erhält man schließlich für  $c > 1$ :  $\text{lf}(G_c^1) = 2^c + 2(-1)^c$ .

Aus 1), 2) und 3) folgt unmittelbar Satz 5.4.2. ☺

In Tabelle 2 sind für  $c = 2, 3, \dots, 12$  die Anzahlen der Linearfaktoren von  $G_c^k$ ,  $k = 0, 1$  und  $G_c$  zusammengestellt:

Tabelle 2

$c$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$k = 0$	3	0	9	0	27	0	81	0	243	0	729
$k = 1$	6	6	18	30	66	126	258	510	1026	2046	4098
$\text{lf}(G_c)$	12	6	36	30	120	126	420	510	1512	2046	5556

Bemerkung 5.4.1:

Von  $\text{Sp} = S_4$  können zwei Folgen von Speichengraphen abgeleitet werden (s. Abb. 5.4):

$B = [B^r; r = 1, 2, \dots]$  und  $Q = [Q^r; r = 1, 2, \dots]$  mit  $B^1 = Q^1 = S_4$ .

Für deren Glieder gelten:  $h(B^r) = 3r$ ,  $v(B^r) = 3 \cdot 2^r - 2$  bzw.  $h(Q^r) = 3$ ,  $v(Q^r) = 6r - 2$ . Beide Graphen sind bipartit und planar,  $B^r$  ist ein Baum und  $Q^r$  hat für  $r > 1$  drei Vierkreise und  $3(r - 2)$  Sechskreise.

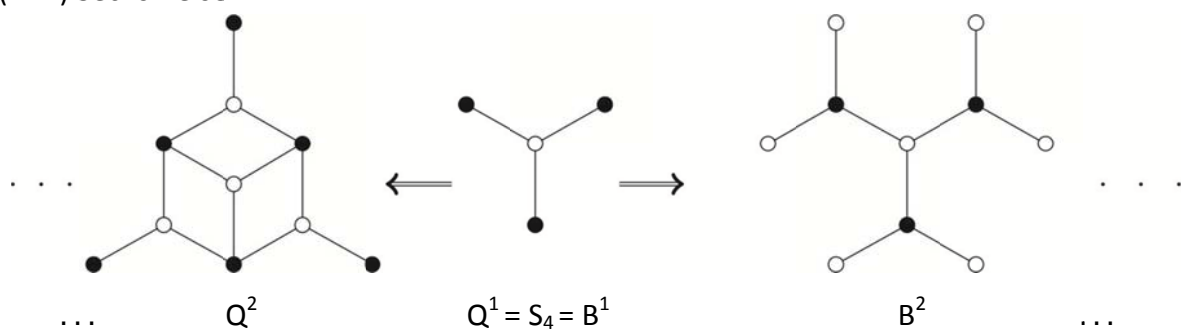


Abb. 5.4: Die ersten zwei Glieder der Folgen  $Q$  und  $B$

Für die Speichengraphen  $GB_c^r = G(B^r, c, 1)$  und  $GQ_c^r = G(Q^r, c, 1)$  gilt ebenfalls, daß jede Kante  $e$  von  $GB^r$  bzw.  $GQ^r$  den Wert  $p(e) = 1/3$  hat (s. Satz 5.4.1). Weiterhin kann man sich überlegen, dass für  $r > 1$  und  $c > 2$   $\text{lf}(GQ_c^r) = 3^{(r-1)c} \text{lf}(G_c)$  ist. Denn im Speichengraph  $GQ_c^r$  muß bei einem Linearfaktor  $\text{LF}$  von  $GQ_c^r$  jeweils genau eine „hängende“ Kante von jeder Speiche im Graphen  $GQ_c^r$  zu  $\text{LF}$  gehören.

## 5.5 Hamiltonkreise

Ein Graph  $G \in \mathbf{G}$  heiße *hamiltonsch*, falls es einen Kreis  $C = C(G)$  in  $G$  derart gibt, dass  $n(C) = n(G)$  ist, d. h., dass Kreis  $C$  alle Knotenpunkte von  $G$  überdeckt. Ein solcher Kreis heißt *Hamiltonkreis* und wir setzen  $C = HK$ . Die *Anzahl der Hamiltonkreise* von  $G$  werde mit  $hk(G)$  bezeichnet. Ein *Hamiltonweg* HW von  $G$  ist ein Weg, der alle Knotenpunkte von  $G$  überdeckt.

Satz 5.5.1: Für  $c > 2$  hat der Graph  $G_c$  wenigstens einen Hamiltonkreis.

### Beweis:

Wir nehmen an, dass  $G_c$  einen Hamiltonkreis  $HK = HK_c = HK(G_c)$  habe. Mit der oben für den Speichengraphen  $Sp = S_4$  angegebenen Knotenpunktnumerierung gibt es (bis auf Rotation) vier mögliche Anordnungen von  $HK$  bezüglich einer Speiche  $Sp_i = S_4$  von  $G_c$  (Abb. 5.5: a1, a2, b1, b2). Geht  $HK$  durch einen peripheren Knotenpunkt nur nach oben bzw. nur nach unten hindurch, so wird diese Situation mit „+“ bzw. mit „-“ und im dritten Falle (von oben nach unten) mit „±“ bezeichnet (Abb. 5.5). Offensichtlich folgt auf einen „-“ bzw. „±“-Durchgang ein „+“- oder „±“-Durchgang bzw. auf einen „+“- folgt ein „-“-Durchgang jeweils auf der darunter befindlichen Speiche. Die restlichen zu  $HK$  gehörenden Kanten der betrachteten Speichen  $Sp = S_4$  ergeben sich zwangsläufig. Mit Hilfe einer Matrix **HK** von  $c$  Zeilen und drei Spalten kann auf diese Art ein  $HK$  leicht veranschaulicht werden:

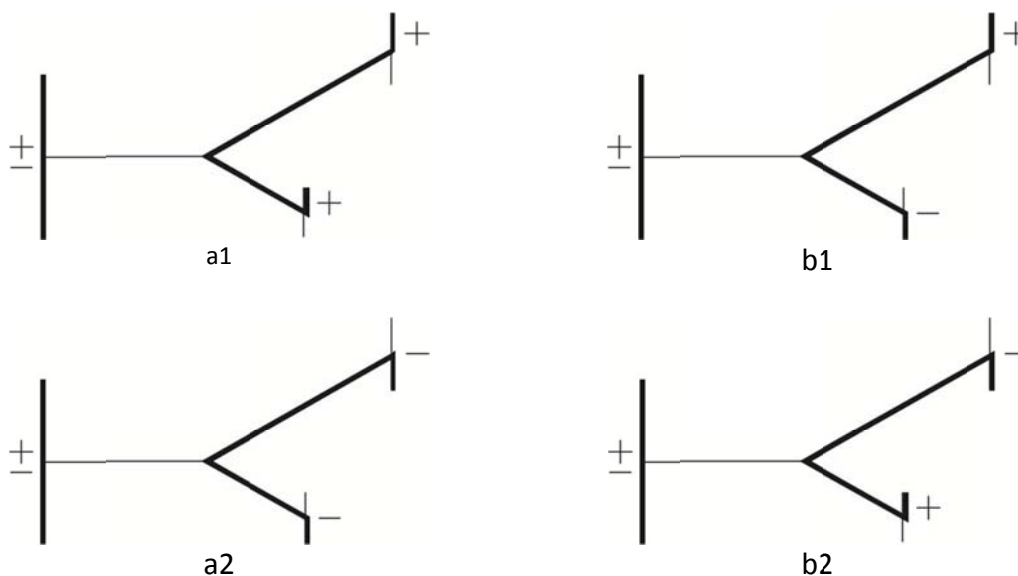


Abb. 5.5: Mögliche Anordnungen eines Hamiltonkreises in einer Speiche von  $G_c$

Bei der hier gegebenen Speiche  $S_4$  ist klar, dass ein „±“ in jeder Zeile von Matrix **HK** genau einmal auftritt.

Die Graphen  $G_3$ ,  $G_4$  und  $G_6$  haben jeweils einen solchen Hamiltonkreis  $HK_c$  ( $c = 3, 4, 6$ ):

$$\mathbf{HK}_3 = \begin{pmatrix} \pm & - & + \\ + & \pm & - \\ - & + & \pm \end{pmatrix}, \mathbf{HK}_4 = \begin{pmatrix} \pm & - & - \\ + & \pm & + \\ - & \pm & - \\ \pm & + & + \end{pmatrix} \text{ bzw. } \mathbf{HK}_6 = \begin{pmatrix} \pm & - & - \\ + & + & \pm \\ - & - & \pm \\ + & \pm & + \\ - & \pm & - \\ \pm & + & + \end{pmatrix}.$$

Ist  $c > 4$ , so können geeignete „Einsätze“  $\mathbf{ES}_{u/g}$  in Matrixform (siehe unten) für ungerades bzw. gerades  $c$  angegeben werden, womit der Satz für  $c > 2$  bewiesen ist.

☺

$$\mathbf{ES}_u = \begin{pmatrix} \pm & - & + \\ \pm & + & - \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{ES}_g = \begin{pmatrix} \pm & - & - \\ + & \pm & + \\ - & \pm & - \\ \pm & + & + \end{pmatrix}$$

Für  $c = 2$  gibt es offensichtlich keinen  $\mathbf{HK}_2$ .

Es könnte sich um den kleinsten bipartiten (planaren) kubischen Graph mit Doppelkanten handeln, der keinen HK besitzt?

Mit einem MAPLE-Programm<sup>(13)</sup> zur Ermittlung der Anzahl der Hamiltonkreise eines beliebigen Graphen  $G \in \mathbf{G}$  wurden die  $hk(G_c)$ -Werte für  $c = 3, 4, \dots, 12$  berechnet (Tabelle 3).

Tabelle 3:

$c$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$hk(G_c)$	0	6	12	30	12	126	36	510	60	2046	132

Ein Vergleich von  $hk(G_c)$  mit  $lf(G_c)$  führt zu folgender

Vermutung 5.5.1:

Ist  $b \geq 1$  und

$c = 2b$ , so ist  $hk(G_c) = 4[2^{c/2-1} - (-1)^{c/2-1}] = 4[2^{b-1} - (-1)^{b-1}]$ , und für

$c = 2b + 1$  ist  $hk(G_c) = lf(G_c)$ .

Bemerkung 5.5.1:

Da Graph  $G_{c>2}$  hamiltonsch und  $n(G_c)$  gerade sind, folgt sofort, daß  $G_{c>2}$  auch wenigstens zwei Linearfaktoren hat.

Bemerkung 5.5.2: Mit den in Abb. 2.1 gegebenen Speichen  $So_6, Sf_8 \in \mathbf{Sp}(3)$  sind  $Go_c = G(So_6, c, \mathbf{1})$  und  $Gf_c = G(Sf_8, c, \mathbf{1})$ ,  $c > 2$ , zwei weitere Speichengraphen. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass  $hk(Go_c) = hk(Gf_c) = hk(G_c)$  ist.

Bemerkung 5.5.3:

Gegeben sind die Speichen  $Q^r$  und  $Q^{r+1}$  (Abb. 5.4),  $r \geq 1$ , mit den hängenden Kanten  $e_1, e_2$ ,

$e_3$  bzw.  $f_1, f_2, f_3$  (Abb. 5.5.2). Der Speichengraph  $GQ_c^r = G(Q^r, c, \mathbf{1})$ ,  $c > 2$  habe den Hamiltonkreis  $HK^r$ , der die Kanten  $e_2, e_3$  von  $Q^r$  enthält. Wird von Speiche  $Q^r$  von  $GQ_c^r$  zu Speiche  $Q^{r+1}$  von  $GQ_c^{r+1}$  übergegangen, so soll der  $HK^r$  entsprechende Hamiltonkreis  $HK^{r+1}$  ebenfalls die beiden Kanten  $e_2, e_3$  enthalten. Das ist aber auf genau zwei Weisen möglich: Entweder sind die Kanten  $f_1, e_2, e_3, f_3 \in E(HK^{r+1})$  oder  $f_1, e_3, e_2, f_2 \in E(HK^{r+1})$ . Somit ergibt sich für jede Speiche der Faktor 2 und es ist  $hk(GQ_c^{r+1}) = 2^c hk(GQ_c^r)$ . ☺

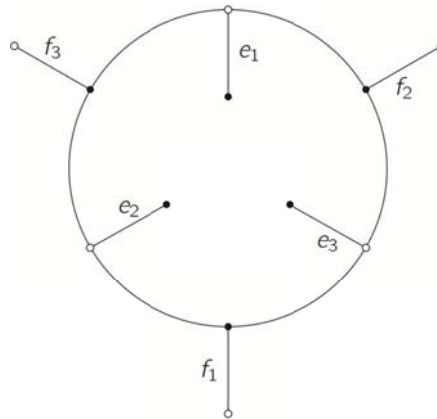


Abb. 5.5.2 Speiche  $Q^{r+1}$

## 5.6 Packungsdichte (covering density)

Die Packungsdichte  $\delta(G)$  eines Graphen  $G$  mit  $n$  Knotenpunkten ist  $\delta(G) = \beta(G)/n$ , wobei  $\beta(G)$  die minimale Anzahl von Knotenpunkten ist, welche alle Kanten repräsentieren (überdecken). Der Graph  $G_c = G(S_4; c, \mathbf{1})$  mit  $c > 1$  hat  $n = vc = 4c$  Knotenpunkte.

Somit sind

für  $c$  gerade:  $\beta(G_c) = 2c$  und  $\delta(G_c) = \frac{1}{2}$  und

für  $c$  ungerade:  $\beta(G_c) = 4[(c-1)/2] + 3 = 2c + 1$  und  $\delta(G_c) = \frac{1}{2} + (4c)^{-1}$ . (5.7)

## 6. Die Graphen $Pe = G(K_2, 5, [1,2])$ und $Pf = G(S_4, 7, [1,2,3])$

Der Petersen Graph  $Pe = G(K_2, 5, [1, 2])$  (Abb. 1) hat keinen Hamiltonkreis. Ebenso hat auch der Speichengraph  $Pf = G(S_4, 7, [1, 2, 3])$  (Abb. 2.2) nach MAPLE-Rechnung keinen Hamiltonkreis, also  $hk(Pe) = hk(Pf) = 0$ . Deshalb sollen weitere Eigenschaften beider Graphen hier zusammengestellt werden.

Es sind:

i)  $p_{Pe}(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 1)^5(\lambda + 2)^4$  und  $p_{Pf}(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 1)^7(\lambda - 2)^8(\lambda^2 + 2\lambda - 1)^6$ ,

ii)  $t(Pe) = 2^5 5^4 = 20000$  und  $t(Pf) = 4^7 1^8 14^6 = 123363917824$ ; somit sind  $q(Pe) = 0.990349$  sowie  $q(Pf) = 0.912086$ , also sehr unterschiedlich.

iii) In den beiden Graphen hat jede Kante  $e \in E(Pe)$  von  $Pe$  bzw.  $f \in E(Pf)$  von  $Pf$  die Pauling'sche Bindungsordnung  $p(e) = p(f) = 1/3$ . Weiter sind  $lf(Pe) = 6$  und  $lf(Pf) = 84$ .

iv) Für Speiche  $Sp' \in \mathbf{Sp}(3)$  haben die Graphen  $Pf' = G(Sp', 7, [1, 2, 3])$  keinen HK, also  $hk(Pf') = 0$ .

## 7. Chemischer Bezug ?

Es ist nicht auszuschließen, dass gewisse ESPG-s auch für die Chemie von Interesse sein könnten. Nehmen wir an, dass die HMO-Theorie von Hückel<sup>(14-17)</sup> auf 3-D-Moleküle anwendbar sei, so sollten z.B. die beiden paaren Graphen  $GB_c^2 = G(B^2, c, \mathbf{k} = \mathbf{1})$  und  $GQ_c^2 = G(Q^2, c, \mathbf{k} = \mathbf{1})$  mit je  $10c$  Knotenpunkten für geeignete  $c$ -Werte interessant sein. Setzt man z. B.  $c = 6$ , so ergeben sich folgende positiven Eigenwerte:

für  $GB^2$ :  $3^{(1)}, 2^{(8)}, 1^{(11)}, 2.732^{(2)}, 0.732^{(2)}, 2.514^{(2)}, 2.086^{(2)}, 0.572^{(2)}$ , und

für  $GQ^2$ :  $3^{(1)}, 2.8223^{(2)}, 2.727^{(2)}, 2.7093^{(1)}, 2.4812^{(2)}, 1.9032^{(1)}, 1.8019^{(4)}, 1.247^{(4)}, 1.2233^{(2)}, 1.1701^{(2)}, 0.6889^{(2)}, 0.445^{(4)}, 0.3186^{(2)}, 0.1939^{(1)}$ .

Damit erhält man für die mit  $GB^2$  bzw.  $GQ^2$  korrespondierenden hypothetischen Moleküle mit jeweils 60 Kohlenstoffatomen eine  $\pi$ -Elektronenenergie von 94,544 bzw.  $89.2896|\beta|$ -

Einheiten, was einer Resonanzenergie per Elektron (kurz: RepE) von  $0.5757|\beta|$ - bzw.  $0.4882$

$|\beta|$ -Einheiten entspricht. Dass der zweite Wert wesentlich kleiner als der erste ist resultiert

aus den Vierkreisen in  $Q^2$ . Der Graph  $G_{c=15}$  hat ebenfalls 60 Knotenpunkte und seine

Eigenwerte sind:  $3, 2.8718^{(2)}, 2.5259^{(2)}, 2.0684^{(2)}, 2^{(2)}, 1.8271^{(4)}, 1.6307^{(2)}, 1.3383^{(4)}, 1.3028^{(2)}, 1.1027^{(2)}, 1.0110^{(2)}, 0.6180^{(4)}, -0.2091^{(4)}, -1^{(5)}, -1.0447^{(2)}, -1.1877^{(2)}, -1.4504^{(2)}, -1.6180^{(4)}, -1.8400^{(2)}, -1.9563^{(4)}, -2.3028^{(2)}, -2.7207^{(2)}, -2.9673^{(2)}$ . Das mit  $G_{c=15}$  korrespondierende

hypothetische Molekül hat somit eine  $\pi$ -Elektronenenergie von  $94.3202|\beta|$ -Einheiten, was

einer RepE von  $0.572|\beta|$ -Einheiten entspricht. Für das gut bekannte ikosaedrische  $C_{60}$ -

Fulleren beträgt die RepE  $0.5527|\beta|$ -Einheiten während für Graphit (ebenfalls im Hückel-

Modell) ein Wert von  $0.5761|\beta|$ -Einheiten per C-Atom bekannt ist<sup>(18)</sup>. Offensichtlich wird bei

dem angegebenen hypothetischen  $C_{60}$ -Molekül, welches mit  $GB_c^2$  korrespondiert, die geometrische Struktur zu einer größeren Destabilisierung beitragen, während das dem Speichengraphen  $G_{c=15}$  entsprechende  $C_{60}$ -Molekül bei ebenfalls sterischer Behinderung ( $c$  wesentlich größer) eine gewisse Stabilität aufweisen sollte.

Man kann für chemisch relevante Fragestellungen den Knotenpunkten und/oder den Kanten einer Speiche und den Randkanten eines Speichengraphen Gewichte zuordnen, sodass bezüglich der (spektralen) Eigenschaften weitere Resultate zu erwarten sind.

## 8. Abschließende Bemerkungen

8.1) Werden neben Mehrfachkanten auch Schlingen zugelassen, so kann  $c \geq 1$  gesetzt werden. Sei  $s$  eine Schlinge, die sich am Knotenpunkt  $i \in V(G)$  von Graph  $G$  befindet. Der Beitrag von  $s$  zur Valenz von  $i$  und zum Eintrag  $a_{ii}$  in der Adjazenzmatrix  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(G) = (a_{ij})$  von  $G$  ist 2. Dann können in  $G(\text{Sp}; c, k)$  ein oder mehrere  $k_j = c$  sein.

Der Speichengraph  $G(\text{Sp}, c = 1, \mathbf{k}) = L$  mit  $\text{Sp} \in \mathbf{Sp}(h)$  heiße *trivialer SpG* (kurz: *TSpG*). Der  $TSpG \ L \in \mathbf{G}^3$  ergibt sich aus  $\text{Sp} \in \mathbf{Sp}(h)$ , indem man an jeden der  $h$  hängenden

Knotenpunkte von  $Sp$  eine Schlinge anfügt (s. o.). Das Polynom  $p_L(\lambda)$  ist stets Teiler des Polynoms von Graph  $G(Sp, c > 1, k)$ .

8.2) Einen  $r \geq 3$  regulären Speichengraphen (kurz:  $r$ -SpG) kann man folgendermaßen erhalten: Man wähle eine Speiche  $Sp \in \mathcal{G}$  mit  $h$  Knotenpunkten der Valenz  $(r - 2)$  und  $(v - h)$  Knotenpunkten der Valenz  $r$ . Hierzu kann auch als Speiche ein  $(r - 2)$ -regulärer Graph gewählt werden, sodass  $h = v$  ist. Die weitere Vorgehensweise für einen  $r$ -SpG ist ganz analog zur oben beschriebenen Konstruktion eines kubischen SpG. In Abb. 6 sind für  $r = 4$  und 5 Beispiele für mögliche Speichen zu finden.

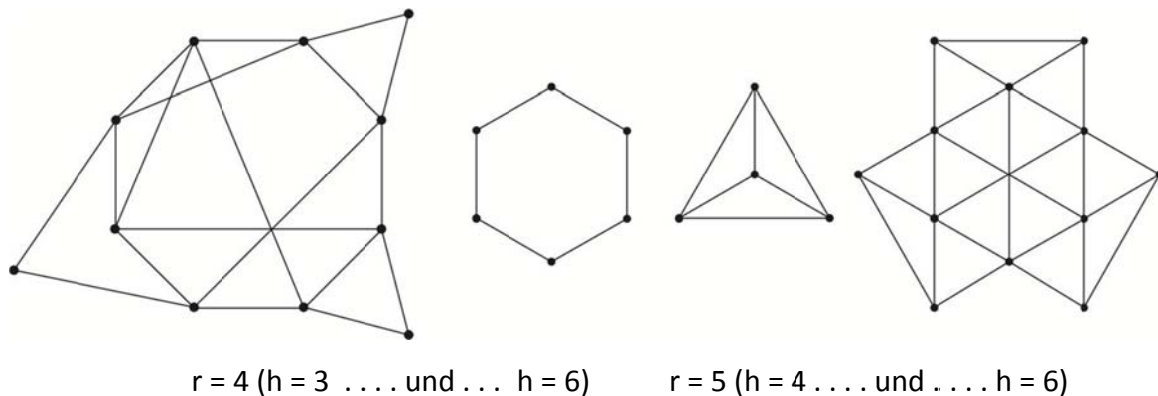


Abb. 6: Je zwei mögliche Speichen für einen 4- bzw. 5-regulären SpG

Wählt man z.B. das in Abb. 6 gegebene Sechseck als Speiche für einen  $r = 4$ -regulären Speichengraphen  $G^T = G(C_6, 4, \mathbf{1})$  mit  $c = 4$  und  $\mathbf{k} = \mathbf{1}$ , so ergeben sich die Eigenwerte zu  $\lambda_{l,k} = 2(\cos(2k\pi/6) + \cos(2l\pi/4))$ , wobei  $k$  und  $l$  die Werte  $l = 0, 1, \dots, 5$  und  $k = 0, 1, 2, 3$  durchlaufen. Das charakteristische Polynom von  $G^T$  ergibt sich hier unmittelbar zu  $p_{GT} = \lambda^2(\lambda \pm 1)^6(\lambda \pm 2)^2(\lambda \pm 3)^2(\lambda \pm 4)$ .

Wählt man z.B. als „Speiche“ den Graphen, der aus genau einem Knotenpunkt  $w$  besteht, so ergibt sich als „Speichengraph“ ein Kreis  $C_c = G(w) = G(Sp = w, c > 1, \mathbf{k} = [\mathbf{1}])$  der Länge  $c$ .

8.3) In einer 2007 erschienenen Arbeit von Sarazin, Paccolo und Previatali<sup>(19)</sup> werden superverallgemeinerte Petersen Graphen (kurz: SGPG)  $P(m, n; k_1, k_2, \dots, k_m)$ ,  $m > 1$ ,  $n > 2$  und  $1 \leq k_j \leq m$ , hinsichtlich ihrer algebraischen Struktur untersucht. Ist kein  $k_j = n/2$ , so können diese Graphen mit der hier eingeführten Nomenklatur auch als  $G(C_m, n, [k_1, k_2, \dots, k_m])$  bezeichnet werden. Als Beispiele seien der Graph  $G(C_3, 5, [1, 1, 2]) = P(3, 5; 1, 1, 2)$  und der Graph  $G^T = G(C_6, 4, \mathbf{1}) = P(6, 4; 1, 1, 1)$  gegeben.

Unser Dank gilt Frau Barbara Hamann (TU Ilmenau) für die sorgfältige Anfertigung der Abbildungen.

## 9. Literatur

- (1) Petersen, J.: Die Theorie der regulären Graphen, Acta Math. **15** (1891), 193 - 220.
- (2) Coxeter, H. S. M.: Self-dual configurations and regular graphs, Bull. Amer. Math. Soc. **56** (1950), 413 – 455.

- (3) Bannai, K.: Hamiltonian cycles in generalized Petersen graphs, J. Combin. Theory, Ser. B, **24** (1978), 181 – 188.
- (4) Watkins, M. E.: A Theorem on Tait Colorings with an Application to the Generalized Petersen Graphs, J. Combin. Theory, **6** (1969), 152 – 164.
- (5) Bouwer, I. Z., W.W. Chernoff, B. Monson und Z. Star: The Foster Census, Charles Babbage Research Centre 1988
- (6) Davis, P. J.: Circulant Matrices, John Wiley & Sons, New York – Chichester – Brisbane – Toronto, 1979.
- (7) Heilbronner, E.: 116. Molecular Orbitals in homologen Reihen mehrkerniger aromatischer Kohlenwasserstoffe: I. Die Eigenwerte von LCAO-MO's in homologen Reihen, Helv. Chim. Acta, **37** (1954), 921 – 935.
- (8) Davidson, R. A.: Spectral analysis of graphs by cyclic automorphism subgroups, Theoret. Chim. Acta (Berl.), **58** (1981), 193 – 231.
- (9) Lovasz', L.: Spectra of graphs with transitive groups, Periodica Mathematica Hungarica, Vol. 6 (2), 1975, 191 - 195
- (10) John, P. E. and H. Sachs: Symmetric Graphs – Spectra and Eigenvectors, Preprint No. 12-01, TU Ilmenau, Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften.
- (11) Cvetkovic', D. M., M. Doob and H. Sachs: Spectra of Graphs, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1980/81; Academic Press, New York 1980; J.A. Barth Verlag, Heidelberg- Leipzig 1995, S. 128
- (12) Ryshik, I. M. und I. S. Gradstein: Summen-, Produkt- und Integraltafeln, Tables of Series, Products, and Integrals, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1957, S. 34 (Formel 1.393)
- (13) Dieses Programm kann auf Wunsch angefordert werden (peter.john@tu-ilmenau.de)
- (14) Hückel, E.: Quantentheoretische Beiträge zum Benzolproblem, Teil 1, Z. Physik, **70** (1931), 204 – 287;
- (15) Hückel, E.: Quantentheoretische Beiträge zum Benzolproblem, Teil 2, Z. Physik, **72** (1931), 310 – 337
- (16) Hückel, E.: Quantentheoretische Beiträge zum Benzolproblem, Teil 3, Z. Physik, **76** (1932), 628 – 64
- (17) Hückel, E.: Quantentheoretische Beiträge zum Benzolproblem, Teil 4, Z. Physik: **83** (1933), 632 – 668
- (18) Fowler, P.W. and D. E. Manolopoulos: An Atlas of Fullerenes, Clarendon Press, Oxford, 1995, p. 45
- (19) Sarazin, M. L., W. Paccolo und A. Previtali: Generalizing the generalized Petersen graphs, Discrete Mathematics, **307** (2007), 534 – 543